RESPOSTAS E/OU SOLUÇÕES

SEÇÃO 3.1

1. (*a*) Se $x < y$ e $y < z$, então $x \leq y$ e $y \leq z$. Logo, $x \leq z$. Se $x = z$, então $x \leq y$ e $y \leq x$. Assim, $x = y$, o que é impossível, pois $x < y$. Portanto, $x < z$.

   (*b*) Segue do item (*a*) que não pode ocorrer simultaneamente $x < y$ e $y < x$. Portanto, no máximo uma das condições ocorre: $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$.

   A recíproca é clara

2. Dados X, Y e Z subconjuntos de A. É claro que $(X, f) \leq (X, f)$. Se

$$(X, f) \leq (Y, g) \text{ e } (Y, g) \leq (X, f),$$

então $X = Y$ e $f = g$. Logo, $(X, f) = (Y, g)$. Finalmente, Se

$$(X, f) \leq (Y, g) \text{ e } (Y, g) \leq (Z, h),$$

então

$$X \subseteq Y \text{ e } f(x) = g(x), \ \forall \ x \in X$$

e

$$Y \subseteq Z \text{ e } g(y) = h(y), \ \forall \ y \in Y.$$

Em particular,

$$X \subseteq Z \text{ e } f(x) = h(x), \ \forall \ x \in X.$$

Assim, $(X, f) \leq (Z, h)$. Portanto, $\leq$ é uma ordem sobre C

3. Dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times B$, obtemos

$$(a, b) \preceq (a, b),$$

pois $a = a$ e $b \leq b$. Se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (a, b)$, então

$$a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b \leq d$$

e

$$c < a \text{ ou } c = a \text{ e } d \leq b.$$

Note que a possibilidade $a < c$ e $c < a$ não pode ocorrer. Assim, $a = c$, $b \leq d$ e $d \leq b$, isto é, $(a, b) = (c, d)$. Finalmente, se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (e, f)$, então

$$a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b \leq d$$

e

$$c < e \text{ ou } c = e \text{ e } d \leq f.$$

Note que se $a < c$ e $c < e$, então $a < e$ e $(a, b) \preceq (e, f)$. Agora, se $a = c = e$, $b \leq d$ e $d \leq f$, então $a = e$, $b \leq f$ e $(a, b) \preceq (e, f)$. Portanto, $\preceq$ é uma ordem sobre $A \times B$.

4. Dados $x, y, z \in A$. É claro que $x \leq x$, pois $x = 1 \cdot x$. Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então existem $r, s \in A$ tais que $y = rx$ e $x = sy$. Logo,

$$\begin{aligned} y &= rx = r(sy) = (rs)y \\ &\Rightarrow rs = 1 \\ &\Rightarrow r = 1. \end{aligned}$$

Assim, $x = y$. Finalmente, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então existem $r, s \in A$ tais que $y = rx$ e $z = sy$. Logo,

$$z = sy = s(rx) = (rs)x.$$

Assim, $x \leq z$. Portanto, $\leq$ é uma ordem sobre A.

5. Dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$, obtemos

$$(a, b) \preceq (a, b),$$

pois $a = a$ e $b \leq b$. Se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (a, b)$, então

$$a = c \text{ e } b \leq d$$

e

$$a = c \text{ e } d \leq b.$$

Assim, $a = c$, $b \leq d$ e $d \leq b$, isto é, $(a, b) = (c, d)$. Finalmente, se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (e, f)$, então

$$a = c \text{ e } b \leq d$$

e

$$c = e \text{ e } d \leq f.$$

Logo, $a = c = e$, $b \leq d$ e $d \leq f$, ou seja, $(a, b) \preceq (e, f)$. Portanto, $\leq$ é uma ordem sobre A.

6. Dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, obtemos

$$(a, b) \preceq (a, b),$$

pois $f(a, b) = f(a, b)$. Se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (a, b)$, então

$$f(a, b) \leq f(c, d) \text{ e } f(c, d) \leq f(a, b).$$

Logo,

$$f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$$

Finalmente, se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (e, f)$, então

$$f(a, b) \leq f(c, d) \text{ e } f(c, d) \leq f(e, f).$$

Logo,

$$f(a, b) \leq f(e, f) \Rightarrow (a, b) \preceq (e, f).$$

Portanto, $\preceq$ é uma ordem sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

7. Pondo $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$. Para quaisquer $x, y, z \in A$, obtemos $x\mathcal{R}_i x$, para todo $i \in I$. Logo, $x\mathcal{R}x$. Se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R}$, então $x\mathcal{R}_i y$ e $y\mathcal{R}_i x$, para todo $i \in I$. Logo, $x = y$. Finalmente, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $x\mathcal{R}_i y$ e $y\mathcal{R}_i z$, para todo $i \in I$. Assim, $x\mathcal{R}_i z$, para todo $i \in I$. Portanto, $x\mathcal{R}z$, isto é, $\mathcal{R}$ é uma ordem sobre A.

8. Dados $f, g, h \in \mathcal{F}$, obtemos $f \preceq f$, pois $f(x) \leq f(x)$, para todo $x \in A$. Se $f \preceq g$ e $g \preceq f$, então

$$f(x) \leq g(x) \text{ e } g(x) \leq f(x), \ \forall \ x \in A.$$

Logo, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$, ou seja, $f = g$. Finalmente, se $f \preceq g$ e $g \preceq h$, então

$$f(x) \leq g(x) \text{ e } g(x) \leq h(x), \ \forall \ x \in A.$$

Assim,

$$f(x) \leq h(x), \ \forall \ x \in A,$$

ou seja, $f \preceq h$. Portanto, $\preceq$ é uma ordem sobre $\mathcal{F}$ que não é total, pois se $b, c \in B$ não são comparáveis, então as funções constantes $f(x) = b$ e $g(x) = c$, para todo $x \in A$, não são comparáveis.

9. Dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times B$, obtemos

$$(a, b) \preceq (a, b),$$

pois $b = b$ e $a \leq a$. Se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (a, b)$, então

$$b < d \text{ ou } b = d \text{ e } a \leq c$$

e

$$d < b \text{ ou } d = b \text{ e } c \leq a.$$

Note que a possibilidade $b < d$ e $d < b$ não pode ocorrer. Assim, $b = d$, $a \leq c$ e $c \leq a$, isto é, $(a, b) = (c, d)$. Finalmente, se $(a, b) \preceq (c, d)$ e $(c, d) \preceq (e, f)$, então

$$b < d \text{ ou } b = d \text{ e } a \leq c$$

e

$$d < f \text{ ou } d = f \text{ e } c \leq e.$$

Note que se $b < d$ e $d < f$, então $b < f$ e $(a,b) \preceq (e,f)$. Agora, se $b = d = f$, $a \leq c$ e $c \leq e$, então $b = f$, $a \leq e$ e $(a,b) \preceq (e,f)$. Portanto, $\preceq$ é uma ordem sobre $A \times B$.

10. Dados $(a,b), (c,d) \in C \times D$, obtemos $a, c \in C$ e $b, d \in D$. Assim, por hipótese, $[a < c$ ou $a = c$ ou $c < a]$ e $[b < d$ ou $b = d$ ou $d < b]$. Logo, se $a < c$, então $(a,b) \preceq (c,d)$. Se $a = c$, então $b < d$ e $(a,b) \preceq (c,d)$ ou $b = d$ e $(a,b) = (c,d)$ ou $d < b$ e $(c,d) \preceq (a,b)$. De modo inteiramente análogo faz o caso $c < a$. Portanto, $(a,b) \preceq (c,d)$ ou $(a,b) = (c,d)$ ou $(c,d) \preceq (a,b)$, ou seja, $C \times D$ é uma cadeia de $A \times B$.

11. Como $E \cap D = \emptyset$ e $E \cup D = B$ temos que

$$(A \times E) \cap (A \times D) = \emptyset \text{ e } (A \times E) \cup (A \times D) = A \times B.$$

Agora, se $(a,b) \in A \times E$ e $(x,y) \preceq (a,b)$, então

$$y < b \text{ ou } y = b \text{ e } x \leq a.$$

Se $y < b$, então $y \in E$, pois $b \in E$. Se $y = b$, então $y \in E$. Portanto, em qualquer caso, $(x,y) \in A \times E$. Finalmente, se $(c,d) \in A \times D$ e $(c,d) \preceq (z,w)$, então

$$y < b \text{ ou } y = b \text{ e } x \leq a.$$

Se $y < b$, então $y \in E$, pois $b \in E$. Se $y = b$, então $y \in E$. Portanto, em qualquer caso, $(x,y) \in A \times E$

12. Dados $a, b, c \in A$, existem únicos $i, j, k \in I$ tais que $a \in A_i$, $b \in A_j$ e $c \in A_k$. É claro que $a \preceq a$. Se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então $i = j$ e $a = b$. Agora, se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, então temos as seguintes possibilidades $i < j$ e $j = k$ ou $i = j$ e $j < k$ ou $i < j$ e $j < k$ ou $i = j$ e $j = k$. Assim, em qualquer possibilidade $a \preceq c$. Finalmente, como I é totalmente ordenado temos que $i < j$ ou $i = j$ ou $i > j$. Se $i < j$ ou $i > j$, então $a \prec b$ ou $a \succ b$.

Se $i = j$, então $a, b \in A_i$ e $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$. Portanto, $\preceq$ é uma ordem total sobre A.

SEÇÃO 3.2

1. Dados $x, y \in A$, se $x < y$ e $x \neq y$, então $f(x) < f(y)$, pois $f(x) \neq f(y)$ e f é crescente.

2. (a) Dados $(a, b), (c, d) \in A \times B$, se $(a, b) \preceq (c, d)$, então $a < c$ ou $a = c$ e $b \leq d$. Assim,
$$p_1(a, b) = a \leq c = p_1(c, d).$$
Portanto, p_1 é uma função crescente.

   (b) Dados $(a, b), (c, d) \in A \times B$, se $(a, b) \preceq (c, d)$, então $b < d$ ou $b = d$ e $a \leq c$. Assim,
$$p_2(a, b) = b \leq d = p_2(c, d).$$
Portanto, p_2 é uma função crescente.

3. Dados $x, y \in f(C)$, existem $a, b \in C$ tais que $x = f(a)$ e $y = f(b)$. Como C é uma cadeia temos que $a \leq b$ ou $a \geq b$. Assim, $x \leq y$ ou $x \geq y$, pois f é crescente. Portanto, $f(C)$ é uma cadeia em B.

4. Dados $a, b \in f^{-1}(C)$ e $x \in A$, com $a \leq x \leq b$. Como f é crescente temos que
$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$
Por outro lado, sendo $a, b \in f^{-1}(C)$, obtemos $f(a), f(b) \in C$ e, por hipótese, $f(x) \in C$. Assim, $x \in f^{-1}(C)$. Portanto, $f^{-1}(C)$ é um subconjunto convexo de A.

5. Já vimos que $\overline{x} = f^{-1}(b)$, para todo $b \in B$. Agora, use o Exercício anterior.

6. Como $E \cap D = \emptyset$ e $E \cup D = B$ temos que
$$f^{-1}(E) \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(E \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

e

$$f^{-1}(E) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(E \cup D) = f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A)) = A,$$

pois f é sobrejetora. Agora, se $a \in f^{-1}(E)$ e $x \leq a$, então $f(a) \in E$ e $f(x) \leq f(a)$, pois f é crescente. Assim, $f(x) \in E$, ou seja, $x \in f^{-1}(E)$. Finalmente, se $b \in f^{-1}(D)$ e $b \leq y$, então $f(b) \in D$ e $f(b) \leq f(y)$, pois f é crescente. Assim, $f(y) \in D$, ou seja, $y \in f^{-1}(D)$. Portanto, $(f^{-1}(E), f^{-1}(D))$ é um corte de A.

7. Vamos provar apenas o item (c). Para isto basta provar $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Dado $y \in f([a,b])$, existe $x \in [a,b]$ tal que $y = f(x)$. Como $a \leq x \leq b$ e f é um isomorfismo temos que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, ou seja, $y \in [f(a), f(b)]$ e $f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$. Para verificar a outra inclusão use f^{-1}.

8. Confira o Exercício anterior.

9. Considere a função $f : A \to \mathcal{F}$ definida como $f(a) = I_a$. Então f é o isomorfismo desejado, por exemplo, dados $a, b \in A$, se $f(a) = f(b)$, então $I_a = I_b$. Logo, $a = b$, pois se $a \neq b$, digamos $a < b$, então $I_a \subset I_b$, o que é impossível Portanto, f é injetora.

10. Vamos provar apenas o item (a). Note que $D_a = A - E_a$, para todo $a \in A$. É claro que $E_a \cap D_a = \emptyset$ e $E_a \cup D_a = A$ Agora, se $b \in E_a$ e $x \leq b$, então $x \leq b$ e $b \leq a$. Logo, $x \leq a$ e $x \in E_a$. Finalmente, se $c \in D_a$ e $c \leq y$, então $a < c$ e $c \leq y$. Logo, $a < y$ e $y \in D_a$. Portanto, (E_a, D_a) é um corte de A, para todo $a \in A$.

11. Dados $x, y \in B$, existem únicos $a, b \in A$ tais que $x = f(a)$ e $y = f(b)$. Como A é um conjunto totalmente ordenado temos que $a < b$ ou $a = b$ ou $a \geq b$. Assim,

$$x = f(a) < f(b) = y \text{ ou } x = f(a) = f(b) = y \text{ ou } x = f(a) > f(b) = y,$$

pois f é um isomorfismo. Portanto, B é um conjunto totalmente ordenado.

SEÇÃO 3.3

1. Vamos provar apenas os itens (a) e (c): (a) Note que
$$a < b \Rightarrow 2a = a + a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}.$$
Por outro lado,
$$a < b \Rightarrow a + b < b + b = 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b.$$
Portanto,
$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$
(c) Suponhamos, por absurdo, que $a > 0$. Então existe $\epsilon_0 = a - \epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon_0 < a$, o que é uma contradição. Portanto, $a = 0$.

2. Basta provar que
$$\inf(B) = \text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_n) \;\text{ e }\; \sup(B) = \text{mmc}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

3. Vamos provar apenas o item (c). Sejam $c = \sup(C)$ e $d = \sup(D)$. Então $x \leq d$, para todo $x \in D$. Em particular, $y \leq d$, para todo $y \in C$, pois $C \subseteq D$. Portanto, d é uma cota superior de C e $c \leq d$, por definição. Afirmação dual: se C, D são subconjuntos de A, $C \subseteq D$ e cada C e D possui ínfimo em A, então $\inf(C) \leq \inf(D)$.

4. Dados $M \in f^{-1}(b)$ e $x \in A$, se $M \leq x$, então $f(M) \leq f(x)$, pois f é crescente. Como $b = f(M)$ e b é um elemento maximal de B temos que $b = f(x)$. Portanto, $M = x$, pois se $M < x$, então $b = f(M) < f(x) = b$, o que é impossível. Neste caso, cada elemento de $f^{-1}(b)$ é um elemento maximal de A.

5. Dado $y \in f(A)$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Como a é o maior elemento de A temos que $z \leq a$, para todo $z \in A$. Assim, $f(z) \leq f(a)$, para todo $z \in A$. Em particular,
$$y = f(x) \leq f(a).$$
Portanto, $f(a)$ é o maior elemento de $f(A)$.

6. Confira o Exercício anterior.

7. Vamos provar apenas o item (c). Suponhamos que $x \in A$ seja uma cota superior de C. Então $a \leq x$, para todo $a \in C$. Dado $c \in f(C)$, existe um único $b \in C$ tal que $c = f(b)$. Como $b \leq x$ temos que
$$c = f(b) \leq f(x).$$
Portanto, $f(x) \in B$ é uma cota superior de $f(C)$. Para provar a recíproca use f^{-1}.

8. Pelo Exemplo 3.28, $\emptyset$ possui um supremo e um ínfimo, os quais são necessariamente o menor elemento e o maior elemento de A, respectivamente.

9. Dado $x \in [a, b] \cap [c, d]$, obtemos
$$a \leq x \leq b \text{ e } c \leq x \leq d \Leftrightarrow a, c \leq x \text{ e } x \leq b, d.$$
Logo, por definição,
$$\sup\{a, c\} \leq x \text{ e } x \leq \inf\{b, d\} \Leftrightarrow \sup\{a, c\} \leq x \leq \inf\{b, d\}.$$
Assim, $x \in [\sup\{a, c\}, \inf\{b, d\}]$ e reciprocamente. Portanto,
$$[a, b] \cap [c, d] = [\sup\{a, c\}, \inf\{b, d\}].$$

10. Dados $c, d \in [a, b]$, obtemos $M = \sup\{c, d\} \in A$. Como $c, d \leq b$ temos que $M \leq b$, pois M é a menor das cotas superiores de $\{c, d\}$. Assim, $M \in [a, b]$. De modo inteiramente análogo, prova que $m = \inf\{c, d\} \in [a, b]$. Portanto, $[a, b]$ é um sub-reticulado de A.

11. Seja A um conjunto finito qualquer. Escolhendo um elemento qualquer x_1 de A. Se x_1 é um elemento maximal de A, acabou. Caso contrário, escolhendo um elemento qualquer x_2 de A, com $x_1 \leq x_2$. Continuando assim, obtemos uma cadeia de elementos de A,
$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$
Como A possui um número finito de elementos temos que essa cadeia para, digamos em x_k. Portanto, $a = x_k$ é um elemento maximal de A

12. Seja $m \in A$ um elemento minimal de A. Dado $x \in A$, obtemos $x \leq m$ ou $m \leq x$, pois A é totalmente ordenado. Assim, $m = x$ ou $m \leq x$, para todo $x \in A$. Portanto, m é um menor elemento de A.

13. Falso. Considere o conjunto

$$A = \{a\} \cup \mathbb{N},$$

com a ordenação que coincide com a de $\mathbb{N}$ e $1 < a$ (faça o Diagrama de Hasse). Então $M = a$ é o único elemento maximal de A, mas não é o maior elemento de A.

14. (a) É claro que $W \subseteq W$, para todo $W \in \mathcal{F}$. Dados $U, W \in \mathcal{F}$, se $U \subseteq W$ e $W \subseteq U$, então $U = W$. Finalmente, dados $U, W, Z \in \mathcal{F}$, se $U \subseteq W$ e $W \subseteq Z$, então é claro que $U \subseteq Z$. Portanto, $\subseteq$ é uma relação de ordem sobre $\mathcal{F}$.

(b) É claro que $\{0\} \subseteq W$, para todo $W \in \mathcal{F}$. Assim, $\{0\}$ é o menor elemento de $\mathcal{F}$. Mais fácil ainda é que $W \subseteq V$, para todo $W \in \mathcal{F}$. Portanto, V é o maior elemento de $\mathcal{F}$.

(c) Confira o Exemplo 3.34.

(d) Segue do item (c).

SEÇÃO 3.4

1. Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional, digamos

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

onde $a, b \in \mathbb{N}$. Seja

$$S = \{n\sqrt{2} : n \in \mathbb{N} \text{ e } n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}.$$

Então $S \neq \emptyset$, pois $b \in S$. Então, existe $s_0 \in S$ tal que $s_0 \leq s$, para todo $s \in S$. Pondo $s_0 = k\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} > 1$, obtemos

$$s_0(\sqrt{2} - 1) = s_0\sqrt{2} - k\sqrt{2} = (s_0 - k)\sqrt{2} > 0 \Rightarrow (s_0 - k)\sqrt{2} \in S,$$

o que é uma contradição. De fato, como $s_0\sqrt{2} = 2k$ e $2 < 2\sqrt{2}$ implica que $2 - \sqrt{2} < \sqrt{2}$ temos que

$$(s_0 - k)\sqrt{2} < s_0.$$

2. Considerando os números reais

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$$

temos, pelo Exemplo 3.45, que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a < r\sqrt{2} < b.$$

Portanto, existe um número irracional $x = r\sqrt{2}$ (prove isto!) tal que $a < x < b$.

3. Vamos provar apenas o item (c). Dado $b \in \mathbb{R}$, obtemos, pela Lei Arquimedes, um elemento $m \in \mathbb{Z}$ tal que $ma > b$. Logo, o conjunto

$$S = \{k \in \mathbb{N} : (k+1)a > b\}$$

é não vazio. Assim, S contém um menor elemento, digamos $n \in S$. Portanto,

$$na \leq b < (n+1)a \Leftrightarrow b \in [na, (n+1)a[,$$

pois $n - 1 \notin S$, ou seja,

$$\mathbb{R} \subseteq \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}} [na, (n+1)a[.$$

A outra inclusão é clara.

4. Note que 1 e 2 não possuem predecessores imediados em A, pois existe $c \in A$ tal que $1 < c < 2$. Além disso,

$$S_1 = \emptyset, S_5 = \{1, 3\}, S_2 = \{1, 3, 5, \ldots\} \text{ e } S_8 = \{1, 3, 5, \ldots; 2, 4, 6\}.$$

8. Suponhamos que $A \neq S$. Então $T = A - S \neq \emptyset$. Logo, T contém um menor elemento, digamos $m \in T$. Vamos provar que $S = S_m$. É claro que $S_m \subseteq S$, pois se $x < m$, então $x \in S$, pois $x \notin T$. Por outro lado, se $x \in S$, então $x < m$, ou seja, $x \in S_m$.

9. Seja S qualquer subconjunto não vazio de B. Então $f^{-1}(S)$ é um subconjunto não vazio de A, pois f é sobrejetora. Logo, $f^{-1}(S)$ contém um menor elemento, digamos $m \in f^{-1}(S)$. É fácil verificar que $m_0 = f(m) \in S$ é o menor elemento de S. Portanto, B é um CBO.

10. Como A e B são conjuntos enumeráveis temos que existem bijeções $f : \mathbb{N}_i \to A$ e $g : \mathbb{N}_p \to B$, em que

$$\mathbb{N}_i = \{1, 3, 7, \ldots\} \text{ e } \mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, \ldots\}.$$

Assim, pelo Corolário 2.23, $f : \mathbb{N}_i \to A \cup B$ e $g : \mathbb{N}_p \to A \cup B$ são funções. Como

$$f|(\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_p) = g|(\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_p)$$

temos, pelo Teorema 2.33, que existe uma única função bijetora $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ tal que $h|\mathbb{N}_i = f$ e $h|\mathbb{N}_p = g$. Explicitamente,

$$h(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{se } n \text{ é um número ímpar} \\ g\left(\frac{n}{2}\right), & \text{se } n \text{ é um número par.} \end{cases}$$

Portanto, pelo Exercício anterior, $A \cup B$ é um CBO.

11. Seja $\mathcal{F} = \{S_a\}_{a \in A}$ uma família de segmentos iniciais de A. Considere a função $f : A \to \mathcal{F}$ definida como $f(a) = S_a$. Então f é o isomorfismo desejado, por exemplo, dados $a, b \in A$, se $a \neq b$, digamos $a < b$, então $a \in S_b$. Como $a \notin S_a$ temos que $S_a \neq S_b$, ou seja, f é injetora.

12. Confira o Exercício anterior.

13. Dados $x, y \in A$, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$, pois se $x \neq y$, então $x < y$ ou $x > y$. Logo, $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$, pois f é estritamente crescente, o que é impossível. Portanto, f é injetora. A recíproca é clara.

14. Suponhamos que (E, D) seja um corte de A. Dados $x \in E$ e $y \in D$, obtemos $x < y$ ou $x > y$, pois $\{E, D\}$ uma partição de A. Se $y < x$, então $x \in E \cap D = \emptyset$, o que é impossível. Portanto, $x \leq y$. Reciprocamente, como $\{E, D\}$ uma partição de A temos que $E \cap D = \emptyset$ e $E \cup D = A$. Agora, se $a \in E$ e $x \leq a$, então $x \in E$, pois $a \notin D$. Finalmente, se $b \in D$ e $b \leq y$, então $y \in D$, pois $b \notin E$. Portanto, (E, D) é um corte de A.

15. Suponhamos que B seja uma seção de A. É claro que

$$B \cap (A - B) = \emptyset \text{ e } A = B \cup (A - B).$$

Agora, se $a \in B$ e $x \leq a$, então $x \in B$, pois B é uma seção de A. Finalmente, se $b \in A - B$ e $b \leq y$, então $y \in A - B$, pois $y \notin A - B$, então $y \in B$. Logo,

$$b \in B \cap (A - B) = \emptyset,$$

o que é impossível. Portanto, $(B, A - B)$ é um corte de A. A recíproca é clara.

16. Suponhamos que B possui um menor elemento, digamos $m \in B$. Então $m \leq x$, para todo $x \in B$. Em particular, $m \leq b$. Dado $y \in S_b \cap B$, obtemos $y < b$ e $m \leq y$. Assim, $m < b$, ou seja, $m \in S_b \cap B$. Portanto, m é o menor elemento de $S_b \cap B$. Reciprocamente, suponhamos que $S_b \cap B$ possui um menor elemento, digamos $n \in S_b \cap B$. Dado $y \in B$, obtemos $b \leq y$ ou $b > y$, pois A é totalmente ordenado. Se $b \leq y$, então $n < y$. Se $b > y$, então $y \in S_b \cap B$. Logo, $n \leq y$, para todo $x \in B$. Portanto, B possui um menor elemento.

17. Confira o Exercício anterior.

18. Suponhamos, por absurdo, que exista uma família

$$S = \{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$$

com $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Então $S \notin \emptyset$ e não possui menor elemento, o que é uma contradição. Reciprocamente, seja S qualquer subconjunto não vazio de A. Então existe $x_0 \in S$. Dado $x_1 \in S$, obtemos

$x_0 \leq x_1$ ou $x_0 \geq x_1$. Se $x_0 \leq x_1$, acabou. Se $x_0 \geq x_1$, então $x_1 \in S$ e $x_0 > x_1$. Continuando assim, obtemos uma cadeia de elementos de S,

$$x_0 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$$

Assim, por hipótese, esta cadeia para, digamos em x_k. Portanto, $m = x_k$ é o menor elemento de S. Finalmente, note que

$$\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{Z}_+\right\}$$

é uma cadeia infinita descendente de $[0, 1]$. Portanto, $[0, 1]$ não é um CBO.

19. Confira o Lema 3.50.

20. Seja $f : A \to A$ um isomorfismo qualquer. Então $x \leq f(x)$, para todo $x \in A$, pois A é um CBO. Por outro lado, como $f^{-1} : A \to A$ é um isomorfismo temos que $x \leq f^{-1}(x)$, para todo $x \in A$. Neste caso,

$$f(x) \leq f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall\ x \in A.$$

Portanto,

$$x \leq f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x,$$

ou seja, $f = I_A$.

21. Como $g \circ f : A \to A$ é um isomorfismo temos, pelo Exercício anterior, que $g \circ f = I_A$. De modo inteiramente análogo, $f \circ g = I_B$. Portanto, $g = f^{-1}$.

22. Seja $g : A \to B$ outro isomorfismo. Então $g^{-1} : B \to A$ é um isomorfismo. Logo, pelo Exercício anterior, $g = f$.

23. Sejam $C \subseteq A$ e $D \subseteq B$ tais que $A \simeq D$ e $B \simeq C$. Então, pelo Corolário 3.62, $C \simeq A$ ou $C \simeq S_a$, para algum $a \in A$, e $D \simeq B$ ou $D \simeq S_b$, para algum $b \in B$. Se $C \simeq S_a$, para algum $a \in A$, então $B \simeq S_a$, para algum $a \in A$. Logo, pelo Lema 3.54, A não é isomorfo a D, o que é